Logika w zastosowaniach kognitywistycznych
Konwersatorium 2: *is convinced that, believes that*

Rozgrzewka:

1. Opisz wiersze następującego dowodu formuły '$\Box p \to \Diamond p$' w rachunku **T**

1. $\Box p \to p$
2. $\Box\neg p \to \neg p$
3. $(\Box\neg p \to \neg p) \to (p \to \neg\Box\neg p)$
4. $p \to \neg\Box\neg p$
5. $p \to \Diamond p$
6. $(\Box p \to p) \to ((p \to \Diamond p) \to (\Box p \to \Diamond p))$
7. $(p \to \Diamond p) \to (\Box p \to \Diamond p)$
8. $\Box p \to \Diamond p$

2. Wyprowadź formułę '$p \to \Box\Diamond p$' w modalnym rachunku zdań, którego aksjomatami specyficznymi są aksjomaty **T** oraz **E**.

---

3. Zakładając, że zachodzi:

$$\neg(\mathbf{C}(a, p) \wedge \mathbf{C}(a, \neg p))$$

wykazać, że zachodzi:

$$\mathbf{C}(a, p) \to \neg\mathbf{C}(a, \neg p).$$

4. Wskazać powód, dla którego prawem logiki przekonań nie powinno być:

$$\mathbf{C}(a, p) \vee \mathbf{C}(a, \neg p)$$

5. Wskazać powód, dla którego prawem logiki przekonań nie powinno być:

$$\mathbf{C}(a, p \vee q) \to \mathbf{C}(a, p) \vee \mathbf{C}(a, q).$$

6. Dlaczego zależności **(C_{10})** i **(C_{11})** mogą być wzmocnione do równoważności?
7. Przyjmijmy, że zależności **(C_{10})** i **(C_{11})** mogą być wzmocnione do równoważności. Wykazać, że wówczas zachodzą:

$$\mathbf{C}(a, \mathbf{C}(a, \mathbf{C}(a, p))) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, p)$$

$$\mathbf{C}(a, \mathbf{C}(a, \neg\mathbf{C}(a, p))) \leftrightarrow \neg\mathbf{C}(a, p)$$

$$\mathbf{C}(a, \neg\mathbf{C}(a, \mathbf{C}(a, p))) \leftrightarrow \neg\mathbf{C}(a, p)$$

$$\neg\mathbf{C}(a, \neg\mathbf{C}(a, \mathbf{C}(a, p))) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, p)$$

8. Wykazać, że zachodzą:

$$\mathbf{C}(a, p) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, \neg\neg p)$$

$$\mathbf{C}(a, \neg(p \vee q)) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, \neg p \wedge \neg q)$$

$$\mathbf{C}(a, \neg(p \wedge q)) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, \neg p \vee \neg q)$$

Wskazówka: proszę skorzystać z **(C_7)** oraz z praw *KRZ*.

9. Wykazać, że zachodzą:

$$\mathbf{C}(a, p \to q) \wedge \mathbf{C}(a, p) \to \mathbf{C}(a, q)$$

$$\mathbf{C}(a, p \to q) \wedge \mathbf{C}(a, \neg q) \to \mathbf{C}(a, \neg p)$$

Wskazówka: proszę skorzystać z **(C_8)**, **(C_1)** oraz z *KRZ*.

10. Wykazać, że zachodzą:

$$\mathbf{B}(a, p) \to \mathbf{B}(a, \mathbf{B}(a, p))$$

$$\neg\mathbf{B}(a, p) \to \mathbf{B}(a, \neg\mathbf{B}(a, p))$$

Wskazówka: postępujemy podobnie jak w przypadkach **(C_{10})** i **(C_{11})**, z tym, że korzystamy z **(E_5)**, **(E_6)** i **(E_7)**.

Autorem większości zadań jest prof. Andrzej Wiśniewski.

Logika w zastosowaniach kognitywistycznych
Konwersatorium 2: *is convinced that, believes that*

1) *a* jest całkowicie przekonany/przekonana, że *p* [„is convinced that”]: **C**(*a*, *p*)

2) *a* jest przekonany/ przekonana, że *p* [‘”believes that”]: **B**(*a*, *p*)

3) *a* wie, że *p* [„knows that”]: **K**(*a*, *p*)

(**PROB-C**) $\mathbf{C}(a, p) \leftrightarrow \boldsymbol{Prob}(a, p) = 1$

(**POSS-C**) $\boldsymbol{V}(\mathbf{C}(a, p), \boldsymbol{w})) = \mathbf{1}$ *wtw* $\forall \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{wRw}^* \rightarrow \boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1})$

(**Def. P**) $\mathbf{P}(a, p) \leftrightarrow \neg\mathbf{C}(a, \neg p)$

(**PROB-P**) $\mathbf{P}(a, p) \leftrightarrow \boldsymbol{Prob}(a, p) > 0$

(**POSS-P**) $\boldsymbol{V}(\mathbf{P}(a, p), \boldsymbol{w})) = \mathbf{1}$ *wtw* $\forall \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{wRw}^* \rightarrow \boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1})$

(PROB-B) $\mathbf{B}(a, p) \leftrightarrow \boldsymbol{Prob}(a, p) > ½$

(Def.K*) $\mathbf{K}^*(a, p) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, p) \wedge p$

(**POSS-K**) $\boldsymbol{V}(\mathbf{K}(a, p), \boldsymbol{w})) = \mathbf{1}$ *wtw* $\forall \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{wRw}^* \rightarrow \boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{w}^*) = \mathbf{1})$

(C_1) $\mathbf{C}(a, p) \wedge \mathbf{C}(a, q) \rightarrow \mathbf{C}(a, p \wedge q)$

(C_2) $\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \neg\mathbf{C}(a, \neg p)$

(C_3) $\mathbf{P}(a, p \wedge q) \rightarrow \mathbf{P}(a, p) \wedge \mathbf{P}(a, q)$

(C_4) $\mathbf{C}(a, p \wedge q) \rightarrow \mathbf{C}(a, p) \wedge \mathbf{C}(a, q)$

$\mathbf{C}(a, p \wedge q) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, p) \wedge \mathbf{C}(a, q)$

(C_5) $\mathbf{C}(a, p) \vee \mathbf{C}(a, q) \rightarrow \mathbf{C}(a, p \vee q)$

(C_6) $\mathbf{P}(a, p) \vee \mathbf{P}(a, q) \rightarrow \mathbf{P}(a, p \vee q)$

(C_7) $p \leftrightarrow q \vdash \mathbf{C}(a, p) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, q)$

(C_8) $p \rightarrow q \vdash \mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{C}(a, q)$

(C_9) $p \vdash \mathbf{C}(a, p)$

(C_{10}) $\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{C}(a, \mathbf{C}(a, p))$

(C_{11}) $\neg\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{C}(a, \neg\mathbf{C}(a, p))$

(C_{10})’ $\mathbf{C}(a, p) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, \mathbf{C}(a, p))$

$\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{P}(a, p)$

(E_1) $\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{K}(a, \mathbf{C}(a, p))$

(E_2) $\neg\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{K}(a, \neg\mathbf{C}(a, p))$

(E_3) $\mathbf{K}(a, p) \rightarrow \mathbf{C}(a, p)$

(E_4) $\mathbf{B}(a, p) \wedge \mathbf{C}(a, q) \rightarrow \mathbf{B}(a, p \wedge q)$

(E_5) $\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{B}(a, p)$

(E_6) $\mathbf{B}(a, p) \rightarrow \mathbf{K}(a, \mathbf{B}(a, p))$

(E_7) $\neg\mathbf{B}(a, p) \rightarrow \mathbf{K}(a, \neg\mathbf{B}(a, p))$

(E_8) $\neg\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{K}^*(a, \neg\mathbf{C}(a, p))$

(E_9) $\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{B}(a, \mathbf{K}(a, p))$

(E_{10}) $\mathbf{C}(a, p) \rightarrow \mathbf{C}(a, \mathbf{K}(a, p))$

(E_{10})’ $\mathbf{C}(a, p) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, \mathbf{K}(a, p))$

(E_{11}) $\mathbf{C}(a, \mathbf{C}(a, p)) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, \mathbf{K}(a, p))$

(E_{12}) $\neg\mathbf{K}(a, \neg\mathbf{K}(a, p)) \leftrightarrow \mathbf{C}(a, p)$

(B_1) $\mathbf{B}(a, p) \rightarrow \neg\mathbf{B}(a, \neg p)$

(B_2) $\mathbf{B}(a, p) \rightarrow \mathbf{B}(a, \mathbf{B}(a, p))$

(B_3) $\neg\mathbf{B}(a, p) \rightarrow \mathbf{B}(a, \neg\mathbf{B}(a, p))$

(B_4) $p \leftrightarrow q \vdash \mathbf{B}(a, p) \leftrightarrow \mathbf{B}(a, q)$

(B_5) $p \rightarrow q \vdash \mathbf{B}(a, p) \rightarrow \mathbf{B}(a, q)$

(B_6) $p \vdash \mathbf{B}(a, p)$

(K^*_1) $\mathbf{K}^*(a, p) \rightarrow p$

(K^*_2) $\mathbf{K}^*(a, p) \wedge \mathbf{K}^*(a, q) \rightarrow \mathbf{K}^*(a, p \wedge q)$

(K^*_3) $p \leftrightarrow q \vdash \mathbf{K}^*(a, p) \leftrightarrow \mathbf{K}^*(a, q)$

(K^*_4) $p \rightarrow q \vdash \mathbf{K}^*(a, p) \rightarrow \mathbf{K}^*(a, q)$

(K^*_5) $p \vdash \mathbf{K}^*(a, p)$

(K^*_6) $\mathbf{K}^*(a, p) \rightarrow \mathbf{K}^*(a, \mathbf{K}^*(a, p))$

$\neg\mathbf{K}^*(a, p) \rightarrow \mathbf{K}^*(a, \neg\mathbf{K}^*(a, p))$

(K^*_7) $\neg\mathbf{K}^*(a, \neg\mathbf{K}^*(a, p)) \rightarrow \mathbf{K}^*(a, \neg\mathbf{K}^*(a, \neg\mathbf{K}^*(a, p)))$

(K^*_8) $p \wedge \neg\mathbf{K}^*(a, \neg\mathbf{K}^*(a, p)) \rightarrow \mathbf{K}^*(a, p)$

(K_1) $\mathbf{K}(a, p) \rightarrow p$

(K_2) $\mathbf{K}(a, p) \wedge \mathbf{K}(a, q) \rightarrow \mathbf{K}(a, p \wedge q)$

$\mathbf{K}(a, p) \rightarrow \neg\mathbf{K}(a, \neg p)$

(K_3) $p \leftrightarrow q \vdash \mathbf{K}(a, p) \leftrightarrow \mathbf{K}(a, q)$

(K_4) $p \rightarrow q \vdash \mathbf{K}(a, p) \rightarrow \mathbf{K}(a, q)$

(K_5) $p \vdash \mathbf{K}(a, p)$

(K_6) $\mathbf{K}(a, p) \rightarrow \mathbf{K}(a, \mathbf{K}(a, p))$

$\neg\mathbf{K}(a, p) \rightarrow \mathbf{K}(a, \neg\mathbf{K}(a, p))$

(K_7) $\neg\mathbf{K}(a, \neg\mathbf{K}(a, p)) \rightarrow \mathbf{K}(a, \neg\mathbf{K}(a, \neg\mathbf{K}(a, p)))$

(K_8) $p \wedge \neg\mathbf{K}(a, \neg\mathbf{K}(a, p)) \rightarrow \mathbf{K}(a, p)$